E.N.S. SAINT-CLOUD FONTENAY

OPTION MATH MATH 1

PROBLÈME Durée : 4 heures

(La partie II est indépendante des trois autres parties du problème)

On propose dans ce problème une formulation simplifiée des éléments de la *cinématique des solides.*

On note $\mathbb{R}^n$ l'espace affine euclidien canonique orienté rapporté à son repère naturel $(O ; \vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ et $\mathbb{R}^n_0$ la structure vectorielle d'origine O sur $\mathbb{R}^n$. Soit Ω l'espace des applications affines de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même, G le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^n$. On rappelle qu'à chaque élément T de Ω correspond un couple unique $(u, \vec{\xi}) \in L(\mathbb{R}^n_0) \times \mathbb{R}^n_0$ tel que

$$\forall m \in \mathbb{R}^n : \overrightarrow{OT(m)} = u(\overrightarrow{Om}) + \vec{\xi}$$

et l'on a $T \in G$ si, et seulement si, u est un élément du groupe $SO(n, \mathbb{R})$ des rotations de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n_0$.

Un *mouvement* d'un solide S de $\mathbb{R}^n$ est défini par sa position initiale S_0 (S_0 sera considérée comme une partie de $\mathbb{R}^n$) et ses positions successives $S_t = F(t)(S_0)$ où $F(t) \in G$ pour chaque instant $t \in \mathbb{R}$. Ce mouvement est donc défini par une application $F : \mathbb{R} \to G$. Étant donné une telle application et $t \in \mathbb{R}$ on pose $F(t) = (u(t), \vec{\xi}(t))$ où u est une application de $\mathbb{R}$ dans $SO(n, \mathbb{R})$ et $\vec{\xi}$ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n_0$.

On dit que F est de classe C^k (k entier $\geqslant 0$) et on écrit $F \in C^k(\mathbb{R}, G)$ si $\vec{\xi}$ et les coefficients de la matrice u sont de classe C^k.

Étant donné $F = (u, \vec{\xi}) \in C^1(\mathbb{R}, G)$, $t \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}^n$ on définit au point $p = F(t)(m)$ le *vecteur vitesse* :

$$\vec{v_p} = u'(t)(\overrightarrow{Om}) + \vec{\xi}'(t).$$

On dit que F est *uniforme* si, pour chaque point m de $\mathbb{R}^n$, la norme euclidienne du vecteur précédent est indépendante de t.

Partie I

1° Soient E, F deux applications de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans G. Pour chaque réel t on pose $(E\,F)(t) = E(t)\,F(t)$ dans le groupe G.

Montrer que $EF \in C^1(\mathbb{R}, G)$.

2° On note ${}^TM$ la matrice transposée d'une matrice M.

On rappelle que pour $M \in SO(n, \mathbb{R})$ on a l'égalité ${}^TM = M^{-1}$.

Soit $u \in C^1(\mathbb{R}, SO(n, \mathbb{R}))$. Montrer que pour chaque réel t, les matrices $u'(t)\,u(t)^{-1}$ et $u(t)^{-1}\,u'(t)$ sont antisymétriques.

3° Étant donné $t \in \mathbb{R}$ et $A \in L(\mathbb{R}^n_0)$ on note $u(t) = e^{tA}$ l'exponentielle de la matrice $t\,A$; on a donc $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$.

On rappelle que u est une application de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $GL(n, \mathbb{R})$ caractérisée par chacune des conditions (3.1) et (3.2) suivantes (où u est supposée de classe C^1) :

$$(3.1)\quad \begin{cases} \forall t, s \in \mathbb{R} : u(t+s) = u(t)\,u(s) = u(s)\,u(t) \\ u(0) = I \text{ (la matrice unité)}, \; u'(0) = A. \end{cases}$$

$$(3.2)\quad \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R} : u'(t) = A\,u(t) = u(t)\,A \\ u(0) = I. \end{cases}$$

Montrer que cette application u prend ses valeurs dans $SO(n, \mathbb{R})$ si, et seulement si, A est antisymétrique.

Partie II

1° Soit $M \in SO(n, \mathbb{R})$; on note ${}^TM$ la matrice transposée de M.

Montrer que pour toute matrice réelle N, la matrice ${}^TN + N$ admet au moins une valeur propre réelle.

Soit $\vec{x}$ un vecteur propre non nul de la matrice ${}^TM + M$; en utilisant l'égalité ${}^TM = M^{-1}$, montrer que M laisse invariant le sous-espace $E = \mathbb{R}\vec{x} + \mathbb{R}M(\vec{x})$ de $\mathbb{R}^n_0$ ainsi que l'orthogonal de ce sous-espace.

2° Montrer qu'il existe une décomposition de $\mathbb{R}^n_0$ en somme directe $\mathbb{R}^n_0 = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_k$ de sous-espaces orthogonaux deux à deux, de dimension 1 ou 2 et invariants par M. En déduire l'existence d'une matrice $P \in SO(n, \mathbb{R})$ telle que PMP^{-1} ait la forme suivante :

Tournez la page S. V. P.

page JR 1986 ENS Saint-Cloud--Fontenay Option Mathématiques Math 1

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} I_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & R_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & R_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & R_s \end{array}\right]$$

où I_r est la matrice unité $r \times r$, $R_j = \begin{pmatrix} \cos\theta_j & \sin\theta_j \\ -\sin\theta_j & \cos\theta_j \end{pmatrix}$ est la matrice d'une rotation 2×2 pour $j = 1, 2, \ldots, s$ et $r + 2s = n$.

3° Étant donné deux parties S_0 et S_1 « directement égales » de $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire $S_1 = T(S_0)$ avec $T \in G$), montrer qu'il existe $F \in C^1(\mathbb{R}, G)$ telle que

$$S_1 = F(1)(S_0) \quad \text{et} \quad F(0) = J$$

(on note J l'élément neutre du groupe G).

Partie III

1° Soit $F \in C^1(\mathbb{R}, G)$. On suppose que F est un homomorphisme, c'est-à-dire que :

$$\begin{cases} F(0) = J \text{ (l'élément neutre de G)} \\ \forall s, t \in \mathbb{R} : \ F(t+s) = F(t)\,F(s) = F(s)\,F(t). \end{cases}$$

Montrer que F est uniforme.

2° Soit $E = (u, \vec{\xi}) \in C^1(\mathbb{R}, G)$ telle que $E(0) = J$. On pose :

$$u'(0) = A, \quad \vec{\xi}'(0) = \vec{a}.$$

a. Montrer que A est antisymétrique.

b. On suppose que E est un homomorphisme de $\mathbb{R}$ dans G. Montrer que l'on a les égalités suivantes :

$$\begin{cases} u'(t) = A\,u(t) = u(t)\,A \quad \text{et} \quad u(0) = I \text{ (la matrice unité)} \\ \vec{\xi}'(t) = u(t)(\vec{a}) \quad \text{et} \quad \vec{\xi}(0) = 0. \end{cases}$$

c. Réciproquement, montrer que ces égalités entraînent que E est un homomorphisme de $\mathbb{R}$ dans G (on pourra montrer en particulier que $\xi'(t+s) = u(t)(\xi'(s))$).

3° Pour $n = 1$ et 2 déterminer les homomorphismes de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans G.

4° Soit $F = (u, \vec{\xi})$ un homomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans G.

a. Montrer que l'on peut écrire :

$$\overrightarrow{OF(t)(m)} = e^{tA}\,\overrightarrow{(Om} + \vec{b}) = \vec{b} + \vec{ct}$$

avec $A = u'(0)$, $\vec{c} \in \mathrm{Ker}\,A$ (le noyau de A) et $\vec{\xi}'(0) = A(\vec{b}) + \vec{c}$.

b. Dans l'hypothèse où le mouvement F reste borné c'est-à-dire où l'ensemble $\{ F(t) \mid t \in \mathbb{R} \}$ reste borné dans G, montrer que les déplacements $F(t)$ ont au moins un point fixe commun.

c. Calculer en fonction de A, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\overrightarrow{Op}$ le vecteur vitesse $\vec{v_p}$. Déterminer l'ensemble des points p où ce vecteur $\vec{v_p}$ est de norme minimum.

Partie IV

On suppose $n \geqslant 2$.

Soit $F = (u, \vec{\xi}) \in C^2(\mathbb{R}, G)$, telle que $F(0) = J$.

On pose $V(t) = (u(t))^{-1}\,u'(t)$ et $\vec{\eta}(t) = (u(t))^{-1}(\vec{\xi}'(t))$.

On sait que $V(t)$ est antisymétrique pour chaque $t \in \mathbb{R}$.

1° On suppose que F est un mouvement uniforme. Montrer que l'on a les conditions suivantes :

1.1. $\|\vec{\eta}\|$ est constante;

1.2. $V(\vec{\eta})$ est constante;

1.3. V^2 est constante.

2° Montrer que pour $n = 2$ ou 3, la condition 1.3 ci-dessus entraîne que la matrice antisymétrique V est constante mais que ce résultat ne subsiste pas nécessairement pour $n > 3$.

3° Pour $n = 2$ ou 3, déduire des questions précédentes la détermination des mouvements uniformes.